

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

III кръг
10 май 2008 г.

Ученици от 9-10 клас

1 задача. Телата в Слънчевата система, които се намират на различни средни разстояния от Слънцето, имат различни сидерични периоди на обикаляне около него. Нарисувайте качествено как би изглеждала графиката на изменение на синодичния период на телата с увеличаване на средното им разстояние до Слънцето. За да представите по-добре графиката, пресметнете сидеричния период и съответно разстоянието до Слънцето за няколко характерни стойности на синодичния период.

Решение:

Нека разгледаме случая на тяло, чието средно разстояние до Слънцето е по-малко от радиуса на земната орбита. Ако неговият сидеричен период на обикаляне около Слънцето е T , а орбиталният период на Земята е T_0 , то за синодичния период T' на тялото можем да напишем:

$$\begin{aligned} 1/T' &= 1/T - 1/T_0 \\ T' &= TT_0 / (T_0 - T) \end{aligned} \quad (1)$$

С отдалечаване на тялото от Слънцето, съгласно III закон на Кеплер, неговият сидеричен период ще нараства. Числителят в горната формула също ще нараства, а знаменателят ще намалява. Следователно синодичният период на тялото ще расте. С приближаване на стойността на сидеричния период на тялото до орбиталния период на Земята, синодичният му период ще се стреми към безкрайност.

За синодичния период на тяло със средно разстояние до Слънцето по-голямо от радиуса на земната орбита, можем да напишем:

$$\begin{aligned} 1/T' &= 1/T_0 - 1/T \\ T' &= TT_0 / (T - T_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Колкото по-малък е сидеричният период на тялото, толкова по-голям става синодичният му период. С приближаване на сидеричния период на тялото до периода T_0 на обикаляне на Земята около Слънцето, синодичният му период се стреми към безкрайност. При отдалечаване на тялото от Слънцето сидеричният му период ще расте. Колкото по-голям става сидеричният период от периода T_0 на обикаляне на Земята около Слънцето, толкова синодичният период на тялото T' ще се доближава по стойност до T_0 .

Теоретично най-кратък сидеричен период T_1 ще има тяло, което обикаля около Слънцето по кръгова орбита с радиус, равен на слънчевия радиус R_0 . Съгласно III закон на Кеплер за този случай:

$$R_0^3 / T_1^2 = r_0^3 / T_0^2$$

където r_0 е радиусът на земната орбита.

$$T_1 = T_0 (R_0/r_0)^{3/2}$$

$$T_1 = 0.0003 T_0$$

$$T_1 \approx 2.8 \text{ h} \approx 2 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Както се вижда от формула (1), тъй като $T_1 \ll T_0$, в този случай синодичният период на тялото почти няма да се отличава от сидеричния му период.

Да пресметнем при какво разстояние от Слънцето синодичният период на тялото ще бъде половин година. Очевидно това не може да се реализира при тяло, чието

средно разстояние до Слънцето е по-голямо от земното. За по-близко до Слънцето тяло от формула (1) получаваме:

$$T_2 = T'T_0 / (T_0 + T') = T_0/3$$

Средното разстояние до Слънцето r_2 , на което би обикаляло тяло с такъв сидеричен период можем да пресметнем от III закон на Кеплер:

$$r_2 = r_0(T_2/T_0)^{2/3}$$

$$r_2 \approx 0.48 r_0$$

Да пресметнем също на какво разстояние синодичният период на тялото би бил две години. За по-близко до Слънцето тяло от формула (1) получаваме:

$$T_3 = T'T_0 / (T_0 + T') = 2T_0/3$$

$$r_3 = r_0(T_3/T_0)^{2/3}$$

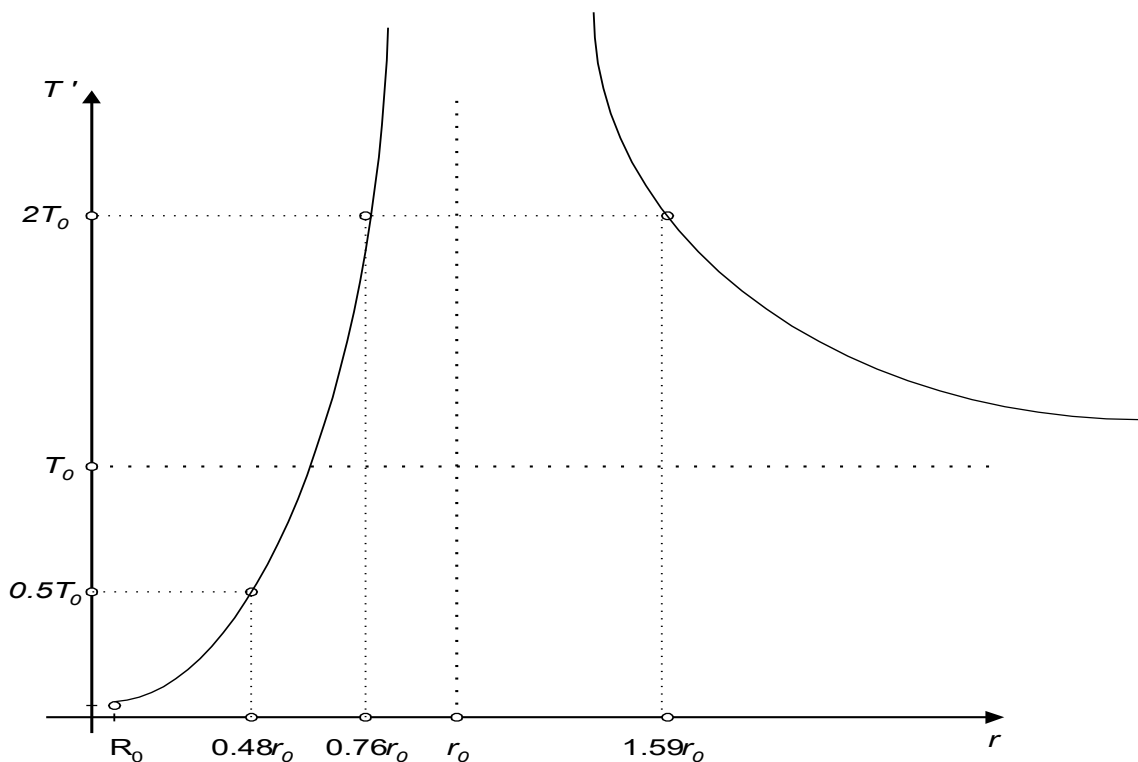
$$r_3 \approx 0.76 r_0$$

За по-далечно от Слънцето тяло от формула (2) получаваме:

$$T_4 = T'T_0 / (T' - T_0) = 2T_0$$

$$r_4 = r_0(T_4/T_0)^{2/3}$$

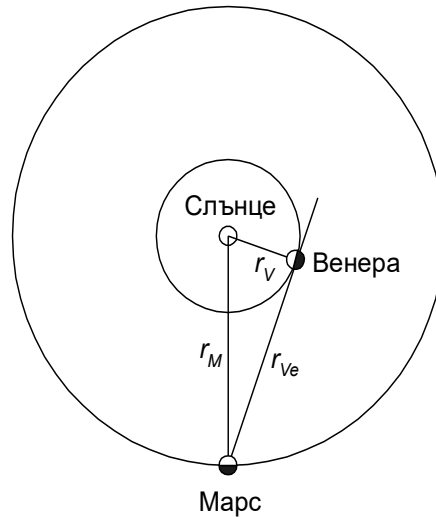
$$r_4 \approx 1.59 r_0$$



2 задача. Млад любител астроном от Марс лесно разпознава ярката Земя и ярката Венера в тъмното небе на своята планета. Все още обаче не е решил дали да участва в Общомарсианската олимпиада по астрономия. За да му покажете силата на теоретичната наука, без да сте виждали марсианското небе, определете коя планета е по-ярка – Земята или Венера, гледани от Марс, когато са в максимална елонгация? Как влияе това дали Марс е в перихелий?

Решение:

Както се вижда от чертежа, при максимална елонгация планетата Венера се вижда от Марс наполовина осветена от Слънцето. Същото важи и за Земята в максимална елонгация. Това ни улеснява да намерим отношението на видимия блясък на Венера към този на Земята.



Разстоянието от Марс до Венера в максимална елонгация е:

$$r_{Ve} = (r_M^2 - r_V^2)^{1/2}$$

където r_M и r_V са разстоянията съответно от Марс и от Венера до Слънцето. За осветеността, която Слънцето създава на Венера, можем да напишем:

$$E_{OV} \sim L/r_V^2$$

А осветеността, която Венера създава на Марс ще бъде:

$$E_V \sim A_V E_{OV} \pi R_V^2 / r_{Ve}^2$$

където A_V е албедото на Венера, а R_V е нейният радиус.

$$E_V \sim A_V L \pi R_V^2 / (r_M^2 - r_V^2) r_V^2$$

По същия начин за видимия блясък на Земята в максимална елонгация получаваме:

$$E_T \sim A_T L \pi R_T^2 / (r_M^2 - r_T^2) r_T^2$$

където с индекс T са означени аналогичните величини за Земята. Отношението на видимия блясък на венера към този на Земята ще бъде:

$$E_V / E_T \sim (A_V / A_T) (R_V / R_T)^2 (r_T / r_V)^2 (r_M^2 - r_T^2) / (r_M^2 - r_V^2)$$

За средно разстояние на Марс до Слънцето пресмятаме:

$$E_V / E_T \approx 2.2$$

Венера е около 2.2 пъти по-ярка от Земята. Ако елонгацията на Венера се наблюдава при средно разстояние на Марс до Слънцето, а елонгацията на Земята – при перихелийно разстояние, то:

$$E_V / E_T \approx 1.5$$

Когато Марс е в перихелий, той става значително по-близък до Земята в максимална елонгация и това наистина чувствително увеличава нейния видим блясък, но все пак тя си остава по-слаба от Венера.

3 задача. След милиарди години еволюция нашето Слънце изчерпва своята енергия и се превръща в бяло джудже. Хората решават да търсят друга, по-млада звезда и тръгват на дълго пътешествие, използвайки като космически кораб цялата Земя. За да продължи нормалният живот на планетата, те осъществяват проекта “Птолемей” – създават “геоцентрична” планетна система. Човешката цивилизация сътворява изкуствено слънце, което се движи в орбита около Земята. При положение, че Земята се върти около оста си със същия период, както сега, на какво разстояние трябва да обикаля около нея новото слънце, така че продължителността на денонощието да се запази почти същата, каквато е сега? Каква трябва да е светимостта на изкуственото слънце, за да имаме приблизително същия климат? Само една ли е подходящата

орбита? Може ли орбитата да е такава, че да има и сезонни промени на земната повърхност?

Приемете, че масата на новото слънце е много по-малка от масата на Земята.

Решение:

Земята се върти около оста си с период $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ sec}$, наречен звездно денонощие. Ние искаме продължителността на слънчевото денонощие при новото слънце да е същата, както сега, т.е. $T_I = 24$ часа. Да отбележим периода на обикаляне на изкуственото Слънце около Земята с T_S . Новото слънце трябва да обикаля около Земята в същата посока, в която тя се върти около себе си. Тогава е в сила съотношението:

$$\begin{aligned} 1/T_I &= 1/T - 1/T_S \\ T_S &= TT_I / (T_I - T) \end{aligned}$$

Дори без да правим числените пресмятания, от формулата можем да разберем, че слънцето трябва да обикаля около Земята с период една сегашна година, или $T_S \approx 365$ дни. Означаваме разстоянието от земята до слънцето с r . Като използваме III закон на Кеплер, получаваме:

$$r^3 / T_S^2 = \gamma M / 4\pi^2$$

където M е масата на Земята, а γ е гравитационната константа.

$$\begin{aligned} r &= (\gamma M T_S^2 / 4\pi^2)^{1/3} \\ r &\approx 2 \times 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

Ако предположим, че изкуственото слънце излъчва във всички посоки, подобно на звезда, то ние можем да сравним неговата светимост L с тази на сегашното истинско Слънце $L_0 = 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$. За да може Земята да получава същата слънчева енергия в единица време от изкуственото слънце, както от истинското, то трябва да е изпълнено съотношението:

$$L / L_0 = r^2 / r_0^2$$

където r_0 е радиусът на земната орбита около истинското Слънце сега.

$$\begin{aligned} L &= L_0 r^2 / r_0^2 \\ L &\approx 6.8 \times 10^{22} \text{ W} \end{aligned}$$

Получава се доста голямо разстояние, при което разходът на енергия от изкуственото слънце ще бъде огромен. То ще трябва да излъчва само около 5600 пъти по-слабо от истинското Слънце сега.

Възможно е обаче и друго решение. Слънцето може да се движи около Земята в посока на нейното въртене и то така, че да изгрява от запад и да залязва на изток. В такъв случай можем да напишем:

$$\begin{aligned} -1/T_I &= 1/T - 1/T_S \\ T_S &= TT_I / (T_I + T) \\ T_S &\approx 12.08 \text{ h} \approx 12 \text{ h } 05 \text{ min} \end{aligned}$$

Разстоянието, на което трябва да бъде при това положение слънцето, е:

$$r \approx 26800 \text{ km}$$

За да намерим необходимата светимост на изкуственото слънце, трябва да отчетем и факта, че радиусът на неговата орбита около центъра на Земята вече е сравним със земния радиус. Следователно в нашите изчисления трябва да използваме не този радиус, а разстоянието от слънцето до повърхността на Земята:

$$L / L_0 = (r - R)^2 / r_0^2$$

където R е радиусът на Земята.

$$\begin{aligned} L &= L_0 (r - R)^2 / r_0^2 \\ L &\approx 7 \times 10^{18} \text{ W} \end{aligned}$$

Изкуственото слънце ще трябва да излъчва с мощност около 54 милиона пъти по-малка от тази на настоящото истинско Слънце. Но това пак си е колосална мощност. За да намалим още повече разходите на енергия, трябва да направим изкуственото слънце

източник на насочена светлина. Най-просто решение е да сложим едно вдлъбнато параболично огледало от обратната страна на слънцето, например. Друг проблем е свързан с това, че Слънцето ще дава необходимата енергия на земната повърхност при така изчислени радиус само когато е достатъчно високо над хоризонта. Когато е ниско над хоризонта, то ще е съществено по-далеч от съответния пункт на земната повърхност. Това означава, че сутрин и вечер ще става доста студено. Така че най-добре ще бъде слънцето да обикаля по орбита с малко по-малък радиус. За по-добро регулиране на земния климат е добре орбитата на слънцето да е наклонена спрямо равнината на земния екватор. Така ще се осигури смяна на сезоните. Това ще бъде възможно, тъй като всеки ден за дадено място Слънцето ще кулминира на различна височина над хоризонта. Друг начин е орбитата на изкуственото Слънце да се направи леко елиптична, така че в моментите на горна кулминация разстоянието до него да се променя. Тогава, обаче, сезоните ще се променят еднакво за двете полукълба на Земята, а няма да са противоположни за северното и южното полукълбо.

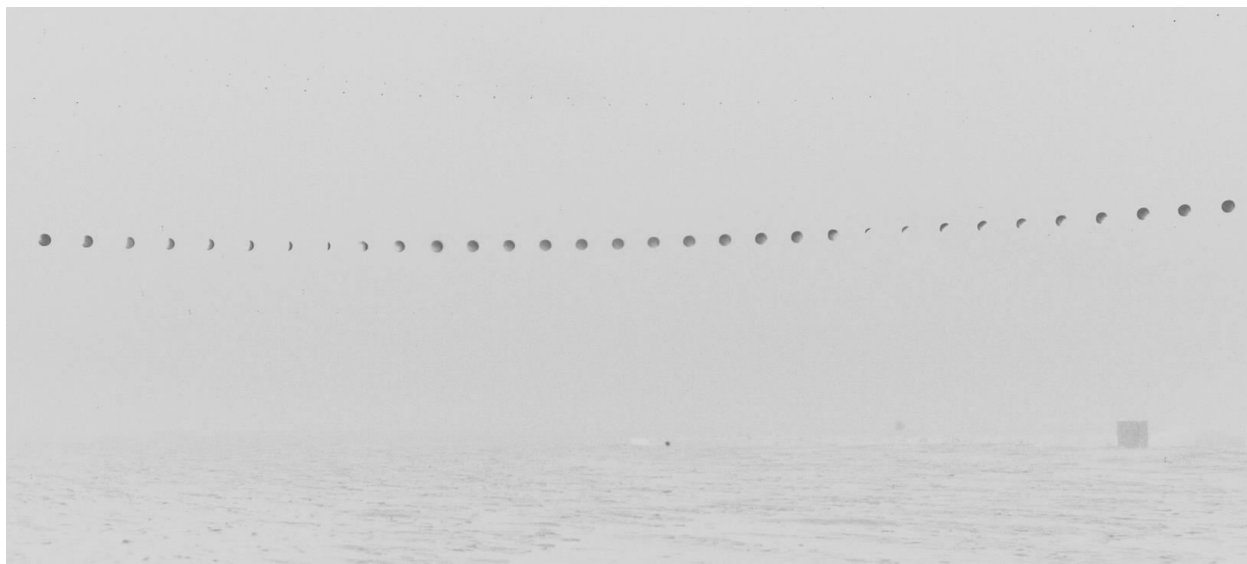
4 задача. Един млад любител астроном – Северин, силно ентусиазиран, пожелал да наблюдава пълното лунно затъмнение на 28 август 2007 година. Не само да го наблюдава, но и да го снима. За да има по-голяма вероятност да заснеме цялото явление, решил да отиде заедно с един американски астроном на любимото му място за наблюдения. Така и направил. Когато се върнал, донесъл тази странна снимка на затъмнението, която е приложена към задачата.

На снимката се вижда поредица от изображения на Луната в различни фази на затъмнението. По време на пълната фаза на затъмнението експонацията е силно увеличена, така че да се получат достатъчно ясни изображения. Всички изображения са негативни. Погледнете ги внимателно.

Определете приблизителните координати на наблюдателя. От коя държава е наблюдавал затъмнението? Според вас, дали е било необходимо да преодолява сериозни трудности в процеса на получаване на изображенията?

Колко време е продължило заснемането на серията изображения на Луната на *Снимка 1*?

Означете на снимката началото и края на пълната фаза на лунното затъмнение. Приблизително колко време е продължила тя?



Снимка 1

Упътване: Нелинейните изкривявания на пътя на Луната на Снимка 1 се дължат на широкоъгълния обектив на фотоапарата.

Ъгловият диаметър на Луната по време на затъмнение е $d = 32'$.

Решение. На Снимка 1 виждаме, че денонощното движение на Луната става практически успоредно на хоризонта. Следователно наблюдателят се е намирал до един от полюсите на Земята. Но на 28 август на Северния полюс е все още полярен ден. Следователно снимката е правена от Северин близо до Южния полюс на Земята. Тази местност не е особено населена и най-вероятно Северин се е намирал в полярната станция на Южния полюс на планетата. Приблизителните координати на наблюдателя са: $\varphi = -90^\circ$. Намирал се е на континента Антарктида, който има специален международен статут и никоя негова част не принадлежи на никоя държава. Що се отнася до условията, то в Антарктида през полярната нощ, те са екстремално неблагоприятни. (Температурата на външния въздух, при заснемането на Снимка 1, е била -68°C . Снимката е правена от отопляема стая през тесен процепа в прозореца.)

За да получим колко време е продължило заснемането на серията трябва на знаем ъгловия мащаб на изображението. За целта използваме изображението на Луната. От справочните данни виждаме, че ъгловият диаметър на Луната е $32'$. Измерваме внимателно изображението на Луната на снимката. Получаваме, че линейният размер на изображението е 2.5 мм. Мащабът на снимката е 12.8 дъгови минути на милиметър. За един час небесната сфера се завърта на 15° . Но Луната, поради правото си орбитално движение, се движи на фона на звездите обратно на видимото въртене на небесната сфера. За да пресметнем видимото въртене на Луната спрямо земната повърхност трябва от ъгловата скорост на Земята да извадим ъгловата скорост на орбиталното движение на Луната - ω_0 .

$$\omega = \omega_0 - \omega_z$$

Получаваме, че Луната видимо се завърта за 1 час на $\omega_l = 14^\circ 24' 34''$.

Измерваме дължината на серията от изображения на Луната, като мерим от центъра на първото изображение до центъра на последното изображение. Получаваме $l = 261\text{мм}$. Умножаваме по мащаба на изображението и получаваме дължината на серията в ъглови единици $l_\lambda = 55^\circ 41'$. Делим на ъгловата скорост на Луната и получаваме за продължителността на серията 3 часа и 52 минути, т.е. около 4 часа.

Понеже наблюдателят се намира на Южния полюс и в която и посока да погледне, гледа на север, видимото движение на небесната сфера е от дясно на ляво. Най-дясното изображение на Луната е първото заснето изображение. Виждаме как постепенно незасенчената част на Луната намалява, докато почти не изчезне при десетото изображение. Единадесетото е вече на Луната, навлязла в сянката на Земята. Затова приемаме, че началото на затъмнението е между двете изображения. Краят на пълната фаза е между 23-то и 24-то изображения. Линейният размер на отсечката е 103 мм. Умножаваме по мащаба и делим на видимата ъглова скорост на Луната и получаваме, че продължителността на пълната фаза на затъмнението е 91.5 минути или 1 час 31.5 минути.

Тази оценка е изключително близо до табличната стойност на продължителността на затъмнението, която е 1 час и 30 минути.